Vorraussetzung:

(1) f ist injektiv, also gilt: $\forall a_1, a_2 \in \mathbf{A} : \left(f(a_1) = f(a_2) \Rightarrow a_1 = a_2 \right)$

(2) g ist injektiv, also gilt: $\forall b_1, b_2 \in \mathbf{B} : \left(g(b_1) = g(b_2) \Rightarrow b_1 = b_2 \right)$

(3) Laut Aussagenlogik gilt: $(\alpha \Rightarrow \beta \Rightarrow \gamma) \Leftrightarrow (\alpha \Rightarrow \gamma)$

Behauptung:

$g \circ f$ ist injektiv, also gilt: $\forall a_1, a_2 \in \mathbf{A} : \left(g(f(a_1)) = g(f(a_2)) \Rightarrow a_1 = a_2 \right)$

Beweis:

Laut (2) gilt: $\forall b_1, b_2 \in \mathbf{B} : \left(g(b_1) = g(b_2) \Rightarrow b_1 = b_2 \right)$
also insbesondere auch:
(4) $\forall f(a_1), f(a_2) \in \mathbf{B} : \left(g(f(a_1)) = g(f(a_2)) \Rightarrow f(a_1) = f(a_2) \right)$ mit $a_1, a_2 \in \mathbf{A}$

Mit (1) bekommen wir die Aussage: $\forall a_1, a_2 \in \mathbf{A} : \left(f(a_1) = f(a_2) \Rightarrow a_1 = a_2 \right)$
Weil $f(a_1) = f(a_2) \Rightarrow a_1 = a_2$ gilt, wird aus (4):
$\forall a_1, a_2 \in \mathbf{A} : \left(g(f(a_1)) = g(f(a_2)) \Rightarrow f(a_1) = f(a_2) \Rightarrow a_1 = a_2 \right)$

Laut (3) bekommen wir also:
$\forall a_1, a_2 \in \mathbf{A} : \left(g(f(a_1)) = g(f(a_2)) \Rightarrow a_1 = a_2 \right)$

$\square$