Berechnung der zweidimensionalen Mechanik für Systeme mit wenigen dynamischen Objekten

Tutorial für PureBasic

von Martin Guttmann (alias STARGÅTE)

1. Einleitung

In diesem Tutorial geht es darum, einen Weg zu zeigen, wie man ein dynamisches System innerhalb eines Zeitabschnitts exakt vorhersagen kann. Darunter zählt sowohl die Positions- und Geschwindigkeitsänderung der Objekte, als auch deren Kollision untereinander.
Wird die Kollision auf „einfache Weise“ immer nur zu bestimmten Zeitpunkt überprüft, kommt es zu Fehlern, wie die Durchdringung zweier Kugeln, wenn diese zu schnell sind oder der Zeitabschnitt zu groß ist. Es ist also nötig bereits aus der gegebenen Situation vorher sagen zu können, wann eine Kollision stattfindet um darauf zu reagieren.

2. Mathematische Grundlagen

Dieses Tutorial ist sehr mathematisch aufgebaut, sodass es, die mathematische Notation auch zu verstehen. Darum folgt in diesem Abschnitt eine kurze Erklärung.

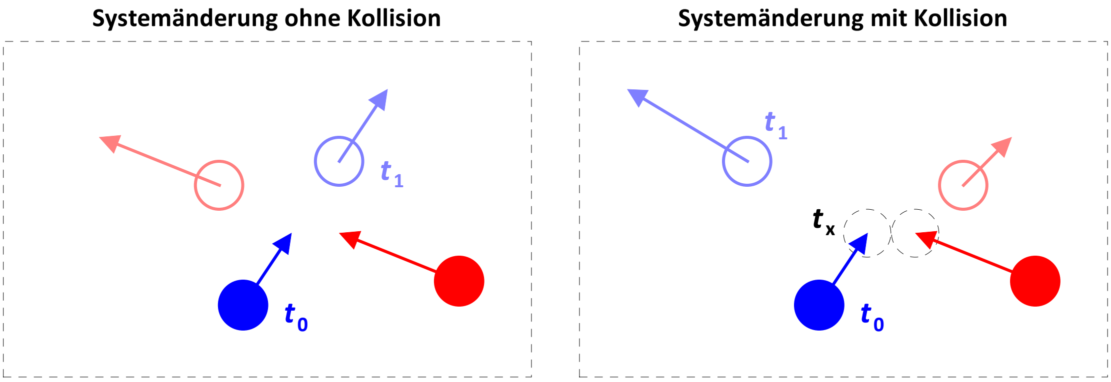
- Werte (skalare Größen) werden stets mit einem kursiven kleinen Buchstaben gekennzeichnet, wie z.B. die Zeit t
- Positionen und Geschwindigkeiten (vektorielle Größen) werden stets mit einem fetten kleinen Buchstaben gekennzeichnet, wie z.B. die Geschwindigkeit $\mathbf{v}$
- Vektoren bieten eine Reihe weiterer Operationen an, welche ebenfalls feste Symbolik haben. Wichtig ist hierbei das Skalarprodukt, welches keine normale Multiplikation darstellt: $\langle \mathbf{a}, \mathbf{b} \rangle = \mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = a_x b_x + a_y b_y$
- Für die Länge eines Vektors gilt: $|\mathbf{a}| = \sqrt{a_x^2 + a_y^2}$
- Daraus folgt der Zusammenhang: $|\mathbf{a}|^2 = a_x^2 + a_y^2 = \mathbf{a} \cdot \mathbf{a} = \mathbf{a}^2$

Feste Symbolik in diesem Tutorial:

- Zeit: t
- Position (fest): $\mathbf{p}$
- Position (variable): $\mathbf{x}$
- Geschwindigkeit: $\mathbf{v}$
- Richtung: $\mathbf{u}$
- Radius: r

3. Das Problem der diskreten Zeit

Die Bewegung in einem System zu einem bestimmten Zeitpunkt t_0 wird exakt durch die Position $\mathbf{p}_0$ und Geschwindigkeit $\mathbf{v}_0$ aller Objekte beschrieben. Um den Zustand des Systems zum nächsten Zeitpunkts t_1 zu berechnen, ist es nötig, alle mögliche Kollisionen zu den Zeitpunkten t_i innerhalb dieses Zeitfensters $t_0 < t_i \le t_1$ zu ermitteln, da diese das System (in Form von Geschwindigkeitsänderungen) verändern.



Ist die aus den Zeitpunkten t_i frühste Kollisionszeit t_x später als der Zielzeitpunkt ($t_x > t_1$), kann die Berechnung des nächsten Zustands direkt über die Zeitdifferenz und die Geschwindigkeiten erfolgen:

$$\mathbf{p}_1 = \mathbf{p}_0 + (t_1 - t_0) \cdot \mathbf{v}_0$$

Ist die frühste Kollisionszeit früher als der Zielzeitpunkt ($t_x \le t_1$), kann zunächst nur der Zustand zur Zeit t_x über $\mathbf{p}_x = \mathbf{p}_0 + (t_x - t_0) \cdot \mathbf{v}_0$ berechnet werden, danach müssen erst die resultierenden Geschwindigkeiten $\mathbf{v}_x$ der Kollision zum Zeitpunkt t_x bestimmt werden.

Dann folgt in diesem System erneut die Berechung der frühste Kollisionszeit t_y, mit der Bedingung $t_y > t_x$. Gilt $t_y \ge t_1$ kann das Zielsystem über $\mathbf{p}_1 = \mathbf{p}_x + (t_1 - t_x) \cdot \mathbf{v}_x$ berechnet werden, ansonsten muss erneut ein Zwischensystem zum Zeitpunkt t_y berechnet werden.

Nur durch diese zeitliche Unterteilung kann gewährleistet werden, dass auch bei hohen Geschwindigkeiten oder großen Zeitabständen alle Kollisionen erfasst werden können und somit das System richtig vorher gesagt werden kann.

4. Bestimmung der Kollisionszeit

Da im System verschiede Objekte miteinander kollidieren können, werden im folgenden Abschnitt die verschiedenen Berechungen zur Bestimmung der frühsten Kollisionszeit hergeleitet.

4.1 Kollision zweier sich bewegender Kreise

Für die Bewegung der beiden Kreise *A* und *B* gilt:

$$\mathbf{x}_A = \mathbf{p}_A + t \cdot \mathbf{v}_A$$
$$\mathbf{x}_B = \mathbf{p}_B + t \cdot \mathbf{v}_B$$

Die Kreise kollidieren miteinander wenn gilt:

$$\left|\mathbf{x}_A - \mathbf{x}_B\right| \leq r_A + r_B \Leftrightarrow \left\langle \mathbf{x}_A - \mathbf{x}_B, \mathbf{x}_A - \mathbf{x}_B \right\rangle \leq (r_A + r_B)^2$$

Daraus ergibt sich folgende Bedingung:

$$(r_A + r_B)^2 = \left\langle \mathbf{p}_A + t \cdot \mathbf{v}_A - \mathbf{p}_B - t \cdot \mathbf{v}_B, \mathbf{p}_A + t \cdot \mathbf{v}_A - \mathbf{p}_B - t \cdot \mathbf{v}_B \right\rangle$$

Mit den Vereinfachungen $r_A + r_B = d$, $\mathbf{p}_A - \mathbf{p}_B = \tilde{\mathbf{p}}$ und $t \cdot \mathbf{v}_A - t \cdot \mathbf{v}_B = t \cdot \tilde{\mathbf{v}}$ wird die folgende Quadratische Gleichung aufgestellt:

$$d^2 = \left\langle \tilde{\mathbf{p}} + t \cdot \tilde{\mathbf{v}}, \tilde{\mathbf{p}} + t \cdot \tilde{\mathbf{v}} \right\rangle$$
$$0 = t^2 \cdot \tilde{\mathbf{v}}^2 + 2t \cdot \tilde{\mathbf{v}} \cdot \tilde{\mathbf{p}} + \tilde{\mathbf{p}}^2 - d^2$$

Aus dieser Gleichung können nun zwei mögliche Zeiten berechnet werden, von denen die kleinere die frühst mögliche Kollision angibt:

$$t = -\frac{\tilde{\mathbf{v}} \cdot \tilde{\mathbf{p}}}{\tilde{\mathbf{v}}^2} \pm \frac{\sqrt{(\tilde{\mathbf{v}} \cdot \tilde{\mathbf{p}})^2 - \tilde{\mathbf{v}}^2 \cdot \left(\tilde{\mathbf{p}}^2 - d^2\right)}}{\tilde{\mathbf{v}}^2}$$
$$t_x = -\frac{\tilde{\mathbf{v}} \cdot \tilde{\mathbf{p}} + \sqrt{(\tilde{\mathbf{v}} \cdot \tilde{\mathbf{p}})^2 - \tilde{\mathbf{v}}^2 \cdot \left(\tilde{\mathbf{p}}^2 - d^2\right)}}{\tilde{\mathbf{v}}^2}$$

4.2 Kollision zwischen einer Wand und eines sich bewegenden Kreises

Für die Bewegung des Kreise *K* gilt:

$$\mathbf{x}_K = \mathbf{p}_K + t \cdot \mathbf{v}_K$$

Die Wand (Strecke) wird beschrieben durch:

$$\mathbf{x}_W = \mathbf{p}_W + s \cdot \mathbf{u}_W \qquad \text{mit } s \in [0,1]$$

Der Kreis kollidiert mit der Wand, wenn gilt:

$$|\mathbf{x}_K - \mathbf{x}_W| \le r_K \Leftrightarrow \langle \mathbf{x}_K - \mathbf{x}_W, \mathbf{x}_K - \mathbf{x}_W \rangle \le r_K^2$$

Analog zu 4.1 ergibt sich folgende Gleichung:

$$r_K^2 = \langle \mathbf{p}_K + t \cdot \mathbf{v}_K - \mathbf{p}_W - s \cdot \mathbf{u}_W, \mathbf{p}_K + t \cdot \mathbf{v}_K - \mathbf{p}_W - s \cdot \mathbf{u}_W \rangle$$

Um diese Gleichung ähnlich elegant zu vereinfachen, muss zunächst eine Bedingung für den Wand-Parameter $s \cdot \mathbf{u}_W$ in Anhängigkeit von t gefunden werden. Diese Lautet:

$$s \cdot \mathbf{v}_W = \mathbf{q} + t \cdot \mathbf{u}_W \cdot \frac{\mathbf{v}_K \cdot \mathbf{u}_W}{\mathbf{u}_W \cdot \mathbf{u}_W} \qquad \text{mit } \mathbf{q} = \mathbf{u}_W \cdot \frac{(\mathbf{p}_K - \mathbf{p}_W) \cdot \mathbf{u}_W}{\mathbf{u}_W \cdot \mathbf{u}_W}$$

Es folgt:

$$r_K^2 = \left\langle \mathbf{p}_K + t \cdot \mathbf{v}_K - \mathbf{p}_W - \mathbf{q} - t \cdot \mathbf{u}_W \cdot \frac{\mathbf{v}_K \cdot \mathbf{u}_W}{\mathbf{u}_W \cdot \mathbf{u}_W}, \mathbf{p}_K + t \cdot \mathbf{v}_K - \mathbf{p}_W - \mathbf{q} - t \cdot \mathbf{u}_W \cdot \frac{\mathbf{v}_K \cdot \mathbf{u}_W}{\mathbf{u}_W \cdot \mathbf{u}_W} \right\rangle$$

$$r_K^2 = \left\langle \mathbf{p}_K - \mathbf{p}_W - \mathbf{q} + t \cdot \left(\mathbf{v}_K - \mathbf{u}_W \cdot \frac{\mathbf{v}_K \cdot \mathbf{u}_W}{\mathbf{u}_W \cdot \mathbf{u}_W} \right), \mathbf{p}_K - \mathbf{p}_W - \mathbf{q} + t \cdot \left(\mathbf{v}_K - \mathbf{u}_W \cdot \frac{\mathbf{v}_K \cdot \mathbf{u}_W}{\mathbf{u}_W \cdot \mathbf{u}_W} \right) \right\rangle$$

Nun kann wieder analog zu 4.1 durch die Vereinfachungen $\mathbf{p}_K - \mathbf{p}_W - \mathbf{q} = \tilde{\mathbf{p}}$ und $\mathbf{v}_K - \mathbf{u}_W \cdot \frac{\mathbf{v}_K \cdot \mathbf{u}_W}{\mathbf{u}_W \cdot \mathbf{u}_W} = \tilde{\mathbf{v}}$ folgende Gleichung aufgestellt werden:

$$\begin{aligned} r_K^2 &= \langle \tilde{\mathbf{p}} + t \cdot \tilde{\mathbf{v}}, \tilde{\mathbf{p}} + t \cdot \tilde{\mathbf{v}} \rangle \\ 0 &= t^2 \cdot \tilde{\mathbf{v}}^2 + 2t \cdot \tilde{\mathbf{p}} \cdot \tilde{\mathbf{v}} + \tilde{\mathbf{p}}^2 - r_K^2 \end{aligned}$$

Aus dieser Gleichung erhält man nun ebenfalls zwei mögliche Zeitpunkte von denen die kleinere die frühst mögliche Kollision angibt:

$$t_{1,2} = -\frac{\tilde{\mathbf{v}} \cdot \tilde{\mathbf{p}}}{\tilde{\mathbf{v}}^2} \pm \frac{\sqrt{(\tilde{\mathbf{v}} \cdot \tilde{\mathbf{p}})^2 - \tilde{\mathbf{v}}^2 \cdot (\tilde{\mathbf{p}}^2 - r_K^2)}}{\tilde{\mathbf{v}}^2}$$