10% HA2 bei Ulrike B. Mes Seiganmuller 314134 28.6.08

1a) $(T_{x,x_0} f)(x+h) = f(x) + \langle h, \operatorname{grad} f \rangle + \underbrace{\frac{1}{2} \langle h, H_f(x)\, h \rangle}_{\text{2. Ord. über den Fehler}}$

$$\Rightarrow (T_{1,0}\,\Phi)(x+h) = \frac{1}{\|y\|} + \left\langle \begin{pmatrix} h_1 \\ h_2 \\ h_3 \end{pmatrix}, \frac{1}{\sqrt{(y_1^2+y_2^2+y_3^2)}^3} \cdot \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} \right\rangle$$

$$+ \frac{1}{2} \left\langle \begin{pmatrix} h_1 \\ h_2 \\ h_3 \end{pmatrix}, H_{\Phi_y}(0) \begin{pmatrix} h_1 \\ h_2 \\ h_3 \end{pmatrix} \right\rangle$$

$$H_{\Phi_y}(0) = \begin{pmatrix} \sqrt{(y_1^2+y_2^2+y_3^2)} - 3y_1^2 \cdot (y_1^2+y_2^2+y_3^2)^{-\frac{5}{2}} & -3y_1y_2(\ldots)^{-\frac{5}{2}} & -3y_1y_3(\ldots)^{-\frac{5}{2}} \\ -3y_1y_2(\ldots)^{-\frac{5}{2}} & (\ldots)^{\frac{1}{2}} - 3y_2^2 \cdot (\ldots)^{-\frac{5}{2}} & -3y_2y_3(\ldots)^{-\frac{5}{2}} \\ -3y_1y_3(\ldots)^{-\frac{5}{2}} & -3y_2y_3(\ldots)^{-\frac{5}{2}} & (\ldots)^{\frac{1}{2}} - 3y_3^2 \cdot (\ldots)^{-\frac{5}{2}} \end{pmatrix}$$

$$(\ldots)^{-\frac{5}{2}} = (y_1^2+y_2^2+y_3^2)^{-\frac{5}{2}}$$

oder: $(T_{1,0}\,\Phi)(x+h) = \frac{1}{\|y\|} + \frac{\langle y, h \rangle}{\|y\|^3} + \text{Fehler}$

2) a) $f(x,y,z) = \frac{1}{xyz}$ Untersuchen auf krit. Pkte: $\boxed{\operatorname{grad} f = 0}$

$$\operatorname{grad} f = \begin{pmatrix} -\frac{1}{x^2yz} \\ -\frac{1}{xy^2z} \\ -\frac{1}{xyz^2} \end{pmatrix} \overset{!}{=} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$\Rightarrow$ für $x,y,z > 0$ existiert kein Extremum.

b) $f(x,y) = x^3 - y^3 - 3(x-y)$

<u>Prüfen auf krit. Pkte:</u>

$$\operatorname{grad} f = \begin{pmatrix} 3x^2 - 3 \\ -3y^2 + 3 \end{pmatrix} \overset{!}{=} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \rightarrow x, y = \pm 1$$

$$\rightarrow P_1\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, P_2\begin{pmatrix} -1 \\ -1 \end{pmatrix}, P_3\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}, P_4\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Hesse-Matrix:

$$H_f(x) = \begin{pmatrix} 6x & 0 \\ 0 & -6y \end{pmatrix}$$

lok. Extrema:

$$H_f(P_1) = \begin{pmatrix} 6 & 0 \\ 0 & -6 \end{pmatrix} \rightarrow \det(H_f(P_1)) = -36 < 0 \rightarrow \text{indefinit}$$

Denn eine Symmetrische Matrix A ist pos./neg definit, falls alle Eigenwerte von A pos./neg sind.

$$H_f(P_2) = \begin{pmatrix} -6 & 0 \\ 0 & 6 \end{pmatrix} \rightarrow \text{indefinit, siehe } H_f(P_1)$$

$$H_f(P_3) = \begin{pmatrix} 6 & 0 \\ 0 & 6 \end{pmatrix} \rightarrow (H_f(P_3))_{11} = 6 > 0,\ \det(H_f(P_3)) = 36 > 0 \rightarrow \text{pos. definit}$$

$\Rightarrow$ lok. Minimum

$$H_f(P_4) = \begin{pmatrix} -6 & 0 \\ 0 & -6 \end{pmatrix} \rightarrow \det(H_f(P_4)) = 36 > 0,\ (H_f(P_4))_{11} = -6 < 0$$

EW sind neg. def und die unterdet / def abwechselnd neg / pos. $\rightarrow$ neg. definit

$\Rightarrow$ lok. Maximum

globale Extrema:

$\lim_{x \to -\infty} f(x,0) = -\infty$, also ex. kein globales Minimum.

$\lim_{x \to \infty} f(x,0) = \infty$, also ex. kein globales Maximum.

3a)

Es gilt $f(tx) = f(x)$

$$f(tx) = \frac{\langle tx, Btx\rangle}{\langle tx, tx\rangle} = \frac{t^2 \langle x, Bx\rangle}{t^2 \langle x, x\rangle} = f(x) \quad \square$$

Fallunterscheidung:

1.) Ist das Max. in einem inneren Pk., so ist die Bed. erfüllt.

2.) Ist das Max. auf einem Randpkt. ($\|x\| = \{\frac{1}{2}, 2\}$), so liegt ein Max. immer innerhalb von D, da man $\|x\|$ mittels $\|tx\|$ so ändern kann, dass $\|tx\| \in D \setminus \partial D$ ist.

b) Es gilt: $Bu \leq \Lambda u$

$$\Rightarrow \langle u, Bu\rangle \leq \langle u, \Lambda u\rangle = \Lambda \langle u, u\rangle \quad \square$$

$$\Rightarrow f(x) = \frac{\langle x, Bx\rangle}{\langle x, x\rangle} \leq \frac{\Lambda \langle x, x\rangle}{\langle x, x\rangle}$$

$$\Rightarrow f(x) \leq \frac{\Lambda \langle x, x\rangle}{\langle x, x\rangle} \Rightarrow f(x) \leq \Lambda$$

c) nach b) $f(x) \leq \Lambda$, also ist Λ das Max. von f.